

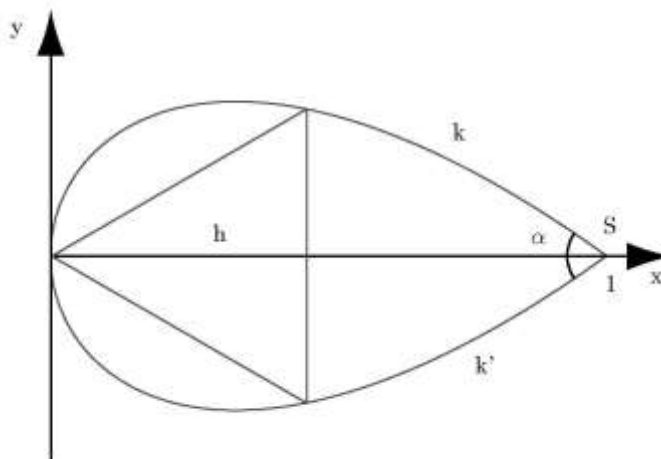
Aufgaben 3. Woche

Sollte es Fragen geben –auch zu den vorherigen Aufgaben- meldet Euch andreas.wilk@sbbz-szm.de

Die Aufgaben bilden den Pool für die letzte LK!

1. Tropfen

Die folgende Skizze zeigt die Kurve k mit der Gleichung $y = (1-x)\sqrt{x}$ im Intervall $0 \leq x \leq 1$. Die Kurve k bildet zusammen mit ihrem Spiegelbild k' eine zur x -Achse symmetrische Figur.



- Wie groß ist der Winkel α bei der Spitze S ?
- Welches ist die größte Breite (parallel zur y -Achse gemessen) des Tropfens?
- Bei der Rotation der Kurve k um die x -Achse entsteht ein 3-dimensionaler tropfenförmiger Körper. Wie groß ist sein Volumen?
- Diesem Körper wird ein Kreiskegel mit der Spitze im Ursprung und der Höhe h auf der x -Achse eingeschrieben (vgl. Skizze). Für welche Höhe h wird das Volumen des Kegels maximal?

2. Untersuchungen

Gegeben ist die Funktion $f(x) = (2x - 1) \cdot e^{ax}$, mit $a \in \mathbb{R}$.

- Gesucht sind die Nullstellen, Extremal- und Wendestellen der Funktion.
- Wie groß ist die Fläche, die $f(x)$ mit der x -Achse einschließt?
- Für welchen Wert von u ($u < 0$) hat das Dreieck mit den Eckpunkten $O(0|0)$, $P(u|0)$ und $Q(u|f(u))$ maximalen Flächeninhalt?

3. Kurvendiskussion, Rotationskörper und ein Extremum

Für jeden Parameterwert $a > 2$ ist

$$\text{durch } f(x) = \frac{x}{a-2} \sqrt{a-x}$$

eine Kurve gegeben

- Diskutiere und skizziere die Kurve für $a = 3$. Verlangt sind Definitionsbereich, Nullstellen und Hochpunkt.
- Die Fläche zwischen der Kurve und der x -Achse rotiert um die x -Achse. Berechne das Volumen des entstehenden Rotationskörpers in Abhängigkeit des Parameters a .
- Bestimme $a > 2$ so, dass das Volumen des vorher berechneten Rotationskörpers extremal wird. Handelt es sich um ein Minimum oder um ein Maximum?

4. Polynomfunktion 3. Grades

Eine Polynomfunktion 3. Grades hat im Ursprung einen Wendepunkt und geht durch die Punkte $A(-1 | 3)$ und $B(2 | 0)$.

(a) Wie lautet die Funktionsgleichung?

(b) Welche Gleichung hat die Wendetangente? (c) Wie groß ist Fläche, die durch den Graph der Polynomfunktion und den Graph der Funktion

$$f(x) = -2x + x^2 \text{ begrenzt wird?}$$

(d) Für welchen x -Wert ist die y -Koordinatendifferenz der beiden Kurven am größten? Wie groß ist diese Strecke?

7. Flugzeugabsturz

Ein Pilot absolviert mit seinem Flugzeug einen Übungsflug über dem Meer. Zu einem bestimmten Zeitpunkt T befindet er sich auf einem 45° -Steigflug exakt 3 km über dem Meeresspiegel. Etwas später, das Flugzeug ist soeben in waagrechter Fluglage genau 1 km (horizontal) weiter und 1 km (vertikal) höher als zum Zeitpunkt T , setzt der Motor aus. Der Pilot rettet sich mit dem Schleudersitz und die Maschine stürzt ins Meer. Der Auftreffpunkt des Flugzeuges auf der Meeresoberfläche befindet sich horizontal 2 km vom Standort zum Zeitpunkt T entfernt.

(a) Erstelle eine Skizze der Situation und der Flugbahn des Flugzeuges. Wähle ein geeignetes Koordinatensystem.

(b) Nähere die Flugbahn durch eine Polynomfunktion von geeignetem Grad an.

(c) Berechne den Auftreffwinkel des abgestürzten Flugzeuges auf der Meeresoberfläche.

8. Kurvendiskussion und die Fläche eines Dreiecks

Gegeben ist die Funktion $f(x) = t \cdot x + e^{-x}$ mit dem Parameter $t > 0$.

(a) $f(x)$ ist auf Extremal- und Wendestellen (x -Koordinaten genügen) zu untersuchen. Für welche Werte von t hat die Funktion an der Stelle $x = 1$ eine Extremstelle?

(b) Wie lautet die Tangentengleichung im Schnittpunkt S der Kurve von $f(x)$ mit der y -Achse? Für welchen Wert von t beträgt der Steigungswinkel dieser Tangente 45° ? In welchem Punkt Q schneidet die Normale in S die x -Achse? Für welchen Wert von t beträgt die Entfernung zwischen S und Q 5 Längeneinheiten?

(c) Die Kurve von $f(x)$ mit $t = 2$, die Geraden $y = 2x$, $x = -\ln 2$ und $x = b$ schließen eine Fläche A ein. Beachte dabei, dass die Gerade $y = 2x$ die schiefe Asymptote der gegebenen Funktion $f(x)$ ist. Berechne den Inhalt der Fläche A in Abhängigkeit von b . Bestimme den Grenzwert $\lim_{b \rightarrow \infty} A(b)$.